BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

RİYAZİYYAT

О СУЩЕСТВОВАНИИ В МАЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА. IV.

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, М.Н.ГЕЙДАРОВА

Бакинский Государственный Университет

Karlen Khudaverdiyev @ yahoo.com

Работа посвящена изучению вопроса существования в малом классического решения одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для полулинейного бипараболического уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)),$$

где $0\le t\le T<+\infty,\ 0\le x\le\pi$. *Введено понятие классического решения рассматриваемой смешанной задачи. Классическое решение изучаемой смешанной задачи ищется в виде ряда Фурье:*

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx \quad (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi),$$

причём после применения метода Фурье нахождение неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)\quad (n=1,2,...)$ *искомого классического решения* $u(t,x)$ *сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучается вопрос существования в малом классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \\ \qquad\qquad (0\le t\le T, 0\le x\le\pi), \quad (1) \\ u(0,x)=\varphi(x)\quad (0\le x\le\pi),\quad u_t(0,x)=\psi(x)\quad (0\le x\le\pi), \quad (2) \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\quad (0\le t\le T), \quad (3)\end{cases}$$

где $0<T<+\infty$; F,φ,ψ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования классического решения задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,. \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t)=(1+n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\varphi_n+te^{-n^2t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(\tau,x))\sin nx\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}\,dx\,d\tau$$
$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,, \tag{6}$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx\ ,\quad \psi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,...)\,, \tag{7}$$

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x))\,, \tag{8}$$

причём нужно иметь в виду обозначения (4) и (5).

2. Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое классическое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

3. В данной работе, с целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\text{☞}(u(t,x)),\frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(t,x))\}\in C([0,T]\times[0,\pi]),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\text{☞}(u(t,x))\}\in C([0,T];L_2(0,\pi)) \tag{9}$$

и

$$\text{☞}(u(t,x))\,|_{x=0}=\text{☞}(u(t,x))\,|_{x=\pi}=0\qquad\forall t\in[0,T]\,, \tag{10}$$

после интегрирования по частям по x два раза в правой части (6), преобразуем к виду:

$$u_n(t) = (1+n^2 t)\cdot e^{-n^2 t}\cdot\varphi_n + te^{-n^2 t}\cdot\psi_n -$$

$$-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^t\int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathfrak{F}(u(\tau,x))\}\sin nx\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}\,dxd\tau$$

$$(n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]). \qquad (11)$$

4. Обозначим через $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty, \qquad (12)$$

где $l\ge 0$ - целое число, $\alpha_i \ge 0\ (i=\overline{0,l})$, $1\le\beta_i\le 2\quad(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\ \in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,t}} \equiv \sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\ (0\le t\le T). \qquad (13)$$

5. Для функции $u(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её n-й компонентой. Пусть $\mathfrak{M}$ - любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$. Совокупность n- х компонент всех функций из $\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{M}_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества $\mathfrak{M}\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного $n\ (n=1,2,\ldots)$ множество $\mathfrak{M}_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $u(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in\mathfrak{M}$, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \qquad \forall u\in\mathfrak{M}.$$

6. Очевидно, что если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B_{2,T}^{k}$, то $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|_{B_{1,t}^{k-1}}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\le\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^{k}}; \tag{14}$$

аналогично

$$\forall u\in B_{2,2,T}^{i,j}\qquad \|u\|_{B_{1,\,1,\,t}^{i-1,j-1}}\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,2,t}^{i,j}}\qquad(0\le t\le T), \tag{15}$$

где k,i,j - любые натуральные числа.

7. Пусть $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B_{2,2,T}^{5,3}$. Тогда, пользуясь оценкой (14) для $k=5$ и $k=3$, $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$ имеем:

$$\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^i\cdot|u_n(t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^i\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}n^4\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|=\|u\|_{B_{1,t}^{4}}\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^{5}}\quad(i=\overline{0,4}); \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^{1+j}u(t,x)}{\partial t\partial x^j}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^j\cdot|u_n'(t)|\le\|u_t\|_{B_{1,t}^{2}}\le\|u\|_{B_{1,1,t}^{4,2}}\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}}\quad(j=\overline{0,2}). \tag{17}$$

Из оценок (16), (17) и структуры пространства $B_{2,2,t}^{5,3}$ следует, что

$$\begin{aligned}&u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x),\\&u_t(t,x),u_{tx}(t,x),u_{txx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]).\end{aligned} \tag{18}$$

Кроме того, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^{\pi}u_{xxxxx}^2(t,x)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n^5\cdot u_n(t))^2\le\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^{5}}^2\le\frac{\pi}{2}\cdot\|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}}^2; \tag{19}$$

$$\int_0^{\pi}u_{txxx}^2(t,x)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n^3\cdot u_n'(t))^2\le\frac{\pi}{2}\cdot\|u_t\|_{B_{2,t}^{3}}^2\le\frac{\pi}{2}\cdot\|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}}^2. \tag{20}$$

Из (19) и (20), в силу структуры пространства $B_{2,2,t}^{5,3}$, следует, что

$$u_{xxxxx}(t,x),\,u_{txxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi)). \tag{21}$$

8. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x)\in C^{(k-1)}([0,\pi]),\quad \varphi^{(k)}(x)\in L_2(0,\pi),\ \varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0\qquad\left(s=\overline{0,\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \tag{22}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя, легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^k \cdot \varphi_n)^2 \le \frac{2}{\pi}\cdot \left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\pi)}, \tag{23}$$

где числа φ_n $(n=1,2,...)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (23) верна и при $k=0$, если $\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$.

9. В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

§2. Исследование единственности классического решения задачи (1)-(3)

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.

2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_6)-F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_6)\right| \le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|,$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

§3. Исследование существования в малом классического решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(4)}([0,\pi])$, $\varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(\pi)=0$;

$\psi(x)\in C^{(2)}([0,\pi])$, $\psi'''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=\psi''(0)=\psi''(\pi)=0$.

2. $F(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_6), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_6)$ $(i=\overline{0,6}), F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_6)$ $(i,j=\overline{0,6})\in$

$\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0$ $\forall t\in[0,T], \xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u\in B^{4,2}_{1,1,T}$ определим в $B^{5,3}_{2,2,T}$ оператор (относительно V) Φ_u:

$$\Phi_u(V(t,x))=\widetilde{V}(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx, \tag{24}$$

где

$$\widetilde{V}_n(t) = (1+n^2 t)\cdot e^{-n^2 t}\cdot \varphi_n + t e^{-n^2 t}\cdot \psi_n -$$

$$-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^t\int_0^\pi \mathcal{A}_u(V(\tau,x))\cos nx\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}dxd\tau \quad (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T])\ , \quad (25)$$

числа φ_n,ψ_n $(n=1,2,\ldots)$ определены соотношением (7),

$$\mathcal{A}(V(t,x)) \equiv G(u(t,x)) + g_4(u(t,x))\cdot V_{xxxxx}(t,x) + g_6(u(t,x))\cdot V_{txxx}(t,x)\,, \quad (26)$$

$$g_i(u(t,x)) \equiv F_{\xi_i}(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x))\ \left(i=\overline{0,6}\right), \quad (27)$$

$$G(u(t,x)) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\text{☞}(u(t,x))\} - g_4(u(t,x))\cdot u_{xxxxx}(t,x) - g_6(u(t,x))\cdot u_{txxx}(t,x)\,, \quad (28)$$

оператор ☞ определён соотношением (8), а ξ_i $(i=\overline{0,6})$ - обозначения аргументов функции $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)$.

Очевидно, что

$$\forall u\in B^{5,3}_{2,2,T} \quad \mathcal{A}_u(u(t,x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\text{☞}(u(t,x))\}\,. \quad (29)$$

Из (25) получаем, что при любом фиксированном $u\in B^{4,2}_{1,1,T}$ $\forall V\in B^{5,3}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$:

$$\left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|\widetilde{V}_n(\tau)\right|\right)^2 \le 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\varphi_n\right)^2 + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\psi_n\right)^2 +$$

$$+\frac{9}{2\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\left\{\mathcal{A}_u(V(\tau,x))\right\}^2 dxd\tau\,, \quad (30)$$

$$\left\|\widetilde{V}_t\right\|^2_{B^3_{2,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|V_n'(\tau)\right|\right)^2 \le 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\varphi_n\right)^2 + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\psi_n\right)^2 +$$

$$+\frac{15}{\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\left\{\mathcal{A}_u(V(\tau,x))\right\}^2 dxd\tau\,; \quad (31)$$

следовательно

$$\left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \equiv \left(\left\|\widetilde{V}\right\|_{B^5_{2,t}} + \left\|\widetilde{V}_t\right\|_{B^3_{2,t}}\right)^2 \le 2\left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^5_{2,t}} + 2\left\|\widetilde{V}_t\right\|^2_{B^3_{2,t}} \le a_0 + \frac{39}{\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\left\{\mathcal{A}_u(V(\tau,x))\right\}^2 dxd\tau\,, \quad (32)$$

где

$$a_0 \equiv 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\varphi_n\right)^2 + 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\psi_n\right)^2\,, \quad (33)$$

причём конечность a_0 следует из (23) для $k=5$ и $k=3$.

Таким образом, при любом фиксированном $u\in B^{4,2}_{1,1,T}$, в силу (32), $\forall V\in B^{5,3}_{2,2,T}$:

$$\left\|\mathcal{P}_u(V)\right\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \equiv \left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \le a_0 + \frac{39}{\pi}\cdot\int_0^T\int_0^\pi\left\{\mathcal{A}_u(V(\tau,x))\right\}^2 dxd\tau\,. \quad (34)$$

Далее, $\forall u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ имеем:

$$\left\| \frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i} \right\|_{C(Q_T)} \le \|u\|_{B^{4,2}_{1,1,T}} \ (i=\overline{0,4}); \qquad \left\| \frac{\partial^{1+j} u(t,x)}{\partial t \partial x^j} \right\|_{C(Q_T)} \le \|u\|_{B^{4,2}_{1,1,T}} \ (j=\overline{0,2}), \tag{35}$$

где $Q_T \equiv [0,T]\times[0,\pi]$.

Кроме того, при любом $V = V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\sin nx \in B^{5,3}_{2,2,T}$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^{\pi} V^2_{xxxxx}(t,x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n^5\cdot V_n(t))^2 \le \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}|V_n(\tau)|)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^5_{2,t}} \le \frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}}, \tag{36}$$

$$\int_0^{\pi} V^2_{txxx}(t,x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n^3\cdot V_n'(t))^2 \le \frac{\pi}{2}\cdot\|V_t\|^2_{B^3_{2,t}} \le \frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}}. \tag{37}$$

Теперь, пользуясь условием 2 данной теоремы, явными выражениями $g_i(u(t,x)), G(u(t,x))$, определёнными соотношениями (27) и (28), и оценками (35), $\forall u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ имеем:

$$\|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u) \ (i=\overline{0,6}), \ \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u), \tag{38}$$

где $C(u) > 0$ - некоторая постоянная, зависящая от u.

Таким образом, пользуясь оценками (38),(36),(37) и соотношением (26), из (34) получаем, что при каждом фиксированном $u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ $\forall V \in B^{5,3}_{2,2,T}$:

$$\|\mathcal{P}_u(V)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \le a_0 + \frac{39}{\pi}\cdot\int_0^T\int_0^{\pi}\{\mathcal{F}_u(V(\tau,x))\}^2 dxd\tau \le$$

$$\le a_0 + 117T\cdot C^2(u) + 117T\cdot C^2(u)\cdot\|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что для любого фиксированного $u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ оператор $\mathcal{P}_u$ действует в $B^{5,3}_{2,2,T}$, причём ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (24)-(28), первой из оценок (38) и оценками (36),(37) (для $V = V_1 - V_2$), аналогично (32) получаем, что при любом фиксированном $u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^{5,3}_{2,2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\|\mathcal{P}_u(V_1) - \mathcal{P}_u(V_2)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \le \frac{39}{\pi}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\{\mathcal{F}_u(V_1(\tau,x)) - \mathcal{F}_u(V_2(\tau,x))\}^2 dxd\tau \le$$

$$\le 78C^2(u)\cdot\int_0^t\|V_1 - V_2\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}}d\tau \le 78C^2(u)\cdot\|V_1 - V_2\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}\cdot t, \tag{40}$$

. . . .

$$\|\mathcal{P}_u(V_1) - \mathcal{P}_u(V_2)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \le \{78C^2(u)\}^k\cdot\|V_1 - V_2\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}\cdot\frac{t^k}{k!}, \tag{41}$$

где k - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^{5,3}_{2,2,T}$:

$$\left\| \mathcal{P}_u(V_1) - \mathcal{P}_u(V_2) \right\|_{B^{5,3}_{2,2,T}} \le q_k(u) \cdot \left\| V_1 - V_2 \right\|_{B^{5,3}_{2,2,T}}, \tag{42}$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot \left(78T \cdot C^2(u)\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{43}$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u$: $q_k(u) < 1$. Для таких k оператор $\mathcal{P}_u^k$ оказывается сжатым в пространстве $B^{5,3}_{2,2,T}$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B^{5,3}_{2,2,T}$ неподвижная точка V оператора $\mathcal{P}_u^k$ является и единственной в $B^{5,3}_{2,2,T}$ неподвижной точкой оператора $\mathcal{P}_u$:

$$V = \mathcal{P}_u(V), \quad V \in B^{5,3}_{2,2,T}. \tag{44}$$

Сопоставив каждому $u \in B^{4,2}_{1,1,T}$ единственную в $B^{5,3}_{2,2,T}$ неподвижную точку V оператора $\mathcal{P}_u$ порождаем оператор H :

$$H(u) = V = \mathcal{P}_u(V), \tag{45}$$

действующий из $B^{4,2}_{1,1,T}$ в $B^{5,3}_{2,2,T}$.

Покажем непрерывность оператора H . Пусть

$$B^{4,2}_{1,1,T} \ni u_k(t,x) \xrightarrow{B^{4,2}_{1,1,T}} u_0(t,x) \in B^{4,2}_{1,1,T} \text{ при } k \to \infty. \tag{46}$$

Тогда, в силу (35) для $u = u_k - u_0$, очевидно, что

$$\frac{\partial^i u_k(t,x)}{\partial x^i} \xrightarrow{C(Q_T)} \frac{\partial^i u_0(t,x)}{\partial x^i} \text{ при } k \to \infty \ (i = \overline{0,4}), \tag{47}$$

$$\frac{\partial^{1+j} u_k(t,x)}{\partial t \partial x^j} \xrightarrow{C(Q_T)} \frac{\partial^{1+J} u_0(t,x)}{\partial t \partial x^j} \text{ при } k \to \infty \ (i = \overline{0,2}) \tag{48}$$

и существует такое число $R_0 > 0$, что $\forall k \ (k = 1,2,\ldots)$ и $t \in [0,T], x \in [0,\pi]$:

$$-R_0 \le u_k(t,x), u_{k,x}(t,x), u_{k,xx}(t,x), u_{k,xxx}(t,x), u_{k,xxxx}(t,x),$$
$$u_{k,t}(t,x), u_{k,tx}(t,x), u_{k,txx}(t,x) \le R_0. \tag{49}$$

Следовательно

$$\left\| G(u_k(t,x)) - G(u_0(t,x)) \right\|_{C(Q_T)} \equiv \varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty, \tag{50}$$

$$\left\| g_i(u_k(t,x)) - g_i(u_0(t,x)) \right\|_{C(Q_T)} \equiv \delta_{i,k} \to 0 \quad (i = 4,6) \text{ при } k \to \infty, \tag{51}$$

$$\left\| g_i(u_k(t,x)) \right\|_{C(Q_T)} \le C_0 \quad (i = 4,6; k = 1,2,\ldots), \tag{52}$$

где $Q_T \equiv [0,T] \times [0,\pi]$, операторы $G,\ g_4$ и g_6 определены соотношениями (28), (27), а $C_0 > 0$ - постоянная.

Примем обозначения:

$$H(u_k) = V_k \quad (V_k = \mathcal{P}_{u_k}(V_k)), \ k = 0,1,\ldots \,. \tag{53}$$

Тогда, пользуясь соотношениями (26)-(28), (50),(51), оценкой (52) и оценками (36), (37) (для $V = V_k - V_0$ и $V = V_0$), аналогично (40) получаем, что $\forall k \ (k = 1,2,...)$ и $t \in [0,T]$:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \equiv \|V_k - V_0\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \equiv \|\mathfrak{A}_{u_k}(V_k) - \mathfrak{A}_{u_0}(V_0)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \le$$

$$\le 195T \cdot \left\{ \varepsilon_k^2 + \frac{1}{2}\left(\delta^2_{4,k} + \delta^2_{6,k}\right) \cdot \|V_0\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \right\} + 195C_0^2 \cdot \int_0^t \|V_1 - V_2\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}} d\tau . \quad (54)$$

Из (54), применив неравенство Беллмана, получаем:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \equiv \|V_k - V_0\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \le 195T \cdot \left\{ \varepsilon_k^2 + \frac{1}{2}\left(\delta^2_{4,k} + \delta^2_{6,k}\right) \cdot \|V_0\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\{195C_0^2 \cdot T\}, \quad k = 1,2,... \ . \quad (55)$$

Отсюда, в силу (50) и (51), следует, что

$$H(u_k) \xrightarrow{B^{5,3}_{2,2,T}} H(u_0) \text{ при } k \to \infty . \quad (56)$$

Таким образом, оператор H действует из $B^{4,2}_{1,1,T}$ в $B^{5,3}_{2,2,T}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B^{4,2}_{1,1,T}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B^{4,2}_{1,1,T}$. Пусть 😐 $=$ 😐$_R$ - любой замкнутый шар пространства $B^{4,2}_{1,1,T}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, очевидно, что при любом $u \in$ 😐$_R$, в силу (35), $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_{xxxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x), u_{txx}(t,x) \le R . (57)$$

Тогда очевидно, что

$$\forall u \in \text{😐}_R \ \ \|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R \ (i = \overline{0,6}), \ \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R , \quad (58)$$

где $C_R > 0$ - постоянная, а $g_i \ (i = \overline{0,6})$ и G определены соотношениями (27) и (28).

Пользуясь оценками (58),(36),(37) и соотношениями (24)-(28), аналогично (32) получаем, что при любом $u \in$ 😐$_R$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \equiv \|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \equiv \|\mathfrak{A}_u(V)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,t}} \le a_0 + \frac{39}{\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\mathfrak{B}_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + 117T \cdot C_R^2 + 117C_R^2 \cdot \int_0^t \|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,\tau}} d\tau . \quad (59)$$

Из (59), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in$ 😐$_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \equiv \|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}} \le \left(a_0 + 117T \cdot C_R^2\right) \cdot \exp\left\{117C_R^2 \cdot T\right\} \equiv a_R^2 . \quad (60)$$

Далее, так как $\forall u \in B^{4,2}_{1,1,T}$

$$H(u) = V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin nx ,$$

где $V_n(t)$ $(n=1,2,...)$ равна правой части (25), то очевидно, что

$$V_n''(t) = -n^4(1-n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\varphi_n - n^2(2-n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\psi_n +$$
$$+\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \Phi_u(V(\tau,x))\sin nx\cdot[2-n^2(t-\tau)]\cdot e^{-n^2(t-\tau)}dxd\tau -$$
$$-\frac{2}{\pi n^2}\cdot\int_0^\pi \Phi_u(V(t,x))\sin nxdx \quad (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \tag{61}$$

Отсюда получаем, что $\forall u\in S_R$:

$$\left(n\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n''(t)\right|\right)^2 \le 4(n^5\cdot\varphi_n)^2 + 16(n^3\cdot\psi_n)^2 + \frac{88}{\pi^2}\cdot\int_0^T\left[\int_0^\pi \Phi_u(V(\tau,x))\sin nxdx\right]^2 d\tau +$$
$$+\frac{16}{\pi}\cdot\sup_{0\le t\le T}\left\{\int_0^\pi\left[\Phi_u(V(t,x))\right]^2dx\right\}\cdot\frac{1}{n^2}, \tag{62}$$

$$\sum_{n=1}^\infty\left(n\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n''(t)\right|\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^\infty(n^5\cdot\varphi_n)^2 + 16\sum_{n=1}^\infty(n^3\cdot\psi_n)^2 + \frac{8\pi}{3}\cdot\sup_{0\le t\le T}\left\{\int_0^\pi\left[\Phi_u(V(t,x))\right]^2dx\right\} +$$
$$+\frac{44}{\pi}\cdot\int_0^T\left\{\int_0^\pi\left[\Phi_u(V(\tau,x))\right]^2dx\right\}d\tau\,. \tag{63}$$

С другой стороны, пользуясь соотношениями (26)-(28) и оценками (58), (36), (37), (60), $\forall u\in S_R$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^\pi\left[\Phi_u(V(t,x))\right]^2dx \le 3\pi\cdot C_R^2\cdot\left(1+\|V\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}\right) \le 3\pi\cdot C_R^2\cdot\left(1+a_R^2\right). \tag{64}$$

Тогда, пользуясь оценкой (64), из (63) получаем, что $\forall u\in S_R$:

$$\|(H(u))_{tt}\|^2_{B^1_{2,T}} \equiv \|V_{tt}\|^2_{B^1_{2,T}} \equiv \sum_{n=1}^\infty\left(n\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n''(t)\right|\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^\infty\left(n^5\cdot\varphi_n\right)^2 +$$
$$+16\sum_{n=1}^\infty\left(n^3\cdot\psi_n\right)^2 + 4(2\pi^2+33T)\cdot C_R^2\cdot\left(1+a_R^2\right) \equiv b_R^2. \tag{65}$$

Таким образом, из оценок (60) и (65) следует, что $\forall u\in S_R$:

$$\|H(u)\|_{B^{5,3,1}_{2,2,2,T}} = \|H(u)\|_{B^{5,3}_{2,2,T}} + \|(H(u))_{tt}\|_{B^1_{2,T}} \le a_R + b_R \equiv c_R; \tag{66}$$

следовательно, множество $H(S_R)$ ограничено в $B^{5,3,1}_{2,2,2,T}$.

Отсюда следует справедливость следующих двух фактов:

а) для каждого фиксированного n $(n=1,2,...)$ совокупность n-тых компонент всех элементов из $H(S_R)$ ограничена в $C^{(2)}([0,T])$ и, следовательно, по теореме Арцела, компактна в $C^{(1)}([0,T])$;

а) в силу оценок

$$\sum_{n=N}^\infty n^4\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n(t)\right| \le \left\{\sum_{n=N}^\infty\left(n^5\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n(t)\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n=N}^\infty\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le a_R\cdot\left(\sum_{n=N}^\infty\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0\le t\le T}|V_n'(t)| \le \left\{\sum_{n=N}^{\infty}\left(n^3 \cdot \max_{0\le t\le T}|V_n'(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le a_R \cdot \left(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $H(u) = V \equiv \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\sin nx \in H(\text{😐}_R)$, такой, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} n^4 \cdot \max_{0\le t\le T}|V_n(t)| + \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0\le t\le T}|V_n'(t)| < \varepsilon,$$

где N - любое натуральное число, а a_R - число, фигурирующее в (60).

Следовательно, по теореме 1, множество $H(\text{😐}_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^{4,2}_{1,1,T}$, компактно в $B^{4,2}_{1,1,T}$. Таким образом, оператор H действует в $B^{4,2}_{1,1,T}$ компактно. Так как оператор H действует (как доказано выше) в $B^{4,2}_{1,1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^{4,2}_{1,1,T}$ вполне непрерывно.

Далее, в силу оценок (15) (для $i = 5, j = 3$) и (60),

$$\|H(u)\|_{B^{4,2}_{1,1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|H(u)\|_{B^{5,3}_{2,2,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \left\{a_0 + 117T \cdot C_R^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{117}{2} \cdot C_R^2\right\}, \quad (67)$$

где числа a_0 и C_R определены соотношениями (33) и (58).

Из (67) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{a_0} \quad (68)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T $\forall u \in \text{😐}_R$ $\|H(u)\|_{B^{4,2}_{1,1,T}} \le R$, т.е. $H(\text{😐}_R) \subset \text{😐}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (68), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар 😐_R в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в ⮷_R по крайней мере одну неподвижную точку u:

$$u = H(u). \quad (69)$$

Так как $u = H(u) = V = \text{✍}_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно, $u = H(u) = \text{✍}_u(u)$, причём, в силу (69) и (66),

$$u(t,x) \in B^{5,3,1}_{2,2,2,T}. \quad (70)$$

Далее, в силу (29), $\mathfrak{A}_u(u) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\{\text{☞}(u(t,x))\}$ и, следовательно, для найденной неподвижной точки $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ удовлетворяют системе (11).

Очевидно, что для функции $u(t,x) \in B^{5,3}_{2,2,T}$, в силу условий 2,3 данной теоремы и свойств (18), (21), (3) функции $u(t,x)$, выполнены все условия (9) и (10). Поэтому функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$, удовлетворяющие системе (11), удовлетворяют и системе (6). Пользуясь этим, показывается, что функция $u(t,x)$ является классическим решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 3 следует выполнение всех условий теоремы 2, то при условиях теоремы 3 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2. Как видно из структуры пространства $B^{5,3,1}_{2,2,2,T}$, классическое решение $u(t,x) \in B^{5,3,1}_{2,2,2,T}$ задачи (1)-(3), найденное нами в процессе доказательства теоремы 3, обладает следующими дополнительными (по сравнению с определением классического решения задачи (1)-(3)) свойствами:

$$u_{xxxxx}(t,x), u_{txxx}(t,x), u_{ttx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi)); \tag{71}$$

$$u_{xxxx}(t,0) = u_{xxxx}(t,\pi) = 0 \quad (0 \le t \le T). \tag{72}$$

Замечание 3. Как видно из процесса доказательства теоремы 3 о существовании в малом классического решения задачи (1)-(3), при условиях теоремы 3 для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)-(3) достаточно показать, что всевозможные классические решения задачи (1)-(3), принадлежащие пространству $B^{5,3}_{2,2,T}$, априори ограничены в $B^{5,3}_{2,2,T}$.

Замечание 4. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [2] и [3], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщённого и почти всюду решений задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. Дис…докт.физ.-мат.наук, Баку, Азербайджанский Государственный Университет, 1973, 319 с.
2. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка. I. // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2007, №1, с.5-14.
3. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка. II. // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2008, №2, с.5-15.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ BİPARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN KLASSİK HƏLLİNİN LOKAL VARLIĞI HAQQINDA. IV.

K.İ.XUDAVERDİYEV, M.N.HEYDƏROVA

XÜLASƏ

İş yarım-xətti biparabolik

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x))$$

tənliyi üçün Rikye tipli bircins sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin klassik həllinin lokal varlığı məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur, burada $0\le t\le T$, $0\le x\le \pi$. Baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinə tərif verilir. Öyrənilən qarışıq məsələnin klassik həlli $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ $(0\le t\le T<+\infty$, $0\le x\le \pi$) Furye sırası şəklində axtarılır. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra axtarılan $u(t,x)$ klassik həllinin naməlum $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ Furye əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra, ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə, baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinin lokal varlığı (yəni T -nin kafi qədər kiçik qiymətləri üçün) haqqında teorem isbat edilir.

ON THE EXISTENCE IN SMALL FOR CLASSICAL SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR SEMILINEAR BIPARABOLIC FOURTH ORDER EQUATION. IV.

K.I.KHUDAVERDIYEV, M.N.HAYDAROVA

SUMMARY

The paper deals with the study of existence in small for classical solution of one-dimensional mixed problem with Riquier type homogenous boundary conditions for semilinear biparabolic fourth order equation of the following form:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)).$$

The consept of classical solution for the given mixed problem is introduced. The classical solution of the mixed problem under consideration is sought in the form of Fourier series $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ $(0\le t\le T<+\infty$, $0\le x\le \pi$). After applying Fourier method, the problem of finding unknown Fourier coefficients $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ of sought classical solution $u(t,x)$ is reduced to solving some countable system of nonlinear integro-differential equations. Then, by combining the generalized contracted mappings principle and Schauder's fixed point principle, the existence in small theorem (that is, true for sufficiently small values of *T*) for classical solution of the mixed problem under consideration is proved .